Лекция 3_ЖСТның негізгі теңдеулері және белгілі шешімдер

20 ғасырдың басында Альберт Эйнштейн жасаған ЖСТ біздің гравитация, кеңістік және уақыт туралы түсінігімізді өзгертті. Содан бері ол көптеген астрофизикалық және космологиялық зерттеулердің іргелі негізі болды және бүкіл әлем ғалымдарының құрметіне ие болуды жалғастыруда. Осы тақырыпты терең баяндау үшін бірнеше негізгі есептерді қарастырайық. Кеңістік пен уақыттың абсолютті және тәуелсіз субъектілер ретіндегі классикалық бейнесінің орнына ЖСТ кеңістік-уақыттың қисықтық геометриясы идеясын енгізеді. Бұл Ньютонның тартылыс теориясындағыдай ауырлық күші материяға әсер ететін күш емес, керісінше, ол кеңістік-уақыттың қисықтығымен байланысты екенін білдіреді.

Гравитацияның бұл жаңа түсіндірмесі Эйнштейннің материя мен энергияның **кеңістік-уақытын қисаюын** сипаттайтын әйгілі теңдеулеріне әкелді. Эйнштейн теңдеулері **тензорлық теңдеулер** жүйесі болып табылады, олардың шешімдері бізге әртүрлі физикалық сценарийлер үшін кеңістік-уақыт метрикасы туралы ақпарат береді.

Бұл тақырыпта біз Эйнштейн теңдеулері туралы түсінігімізді тереңдетеміз, осы теңдеулерден шығатын негізгі есептер мен шешімдерді қарастырып және оларды әртүрлі физикалық және астрофизикалық жағдайларға қолданамыз. **Қара құрдымдар**, **космология** және **гравитациялық толқындар** сияқты маңызды ұғымдарды қарастырамыз, ЖСТ Әлемдегі байқалатын құбылыстарды қалай түсіндіретінін баяндаймыз.

Енді айналатын сұйық шарға арналған Фоктың бірінші жуықтауының нақтыланған метрикасының негізінде ЖСТ механикасының белгілі есебін – массасы m болатын сынақ денесінің, яғни Шварцшильд есебін m_0 массасы үлкен дененің орталық өрісінде қозғалысын қарастырайық. Метрика мына түрде берілген [1].

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U\left(1 + \frac{\xi_0^{\text{ж}}}{m_0 c^2}\right) + \frac{2U^2}{c^2}\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1^{\ 2} + dx_2^{\ 2} + dx_3^{\ 2}\right). \quad (1)$$

Мұндағы $U = \frac{\gamma m_0}{r}$. Есепті сипаттау үшін орбиталық координаталар жүйесінің $\vec{k}$ және $\vec{i}$ бірлік векторларымен бағыты бойынша сәйкес келетін векторлық элементтерді қолданамыз

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}], \quad (2)$$

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}\vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r} \ , \ A = \gamma m m_0 e \ , \quad (3)$$

Векторлық элементтердің уақыт бойынша өзгеруі

$$\dot{\vec{M}} = \left[\dot{\vec{r}}\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\dot{\vec{p}}\right], \tag{4}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}\vec{M}\right] + \left[\frac{\vec{p}}{m}\dot{\vec{M}}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{5}$$

Гамильтон теңдеулерінен $\dot{\vec{r}}$ жәнe $\dot{\vec{p}}$ туындыларды қолданамыз

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \; \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \; . \tag{6}$$

H Гамильтонианды анықтайық, ол үшін (1) қажетті жуықтауда табамыз.

$$ds = cdt\left(1 - \frac{U + \frac{v^2}{2}}{c^2} + \frac{\frac{1}{2}U^2 - \frac{3}{2}Uv^2 - \frac{1}{8}v^4 - U\frac{\xi_0{}^{ж}}{m_0}}{c^4}\right). \tag{7}$$

Лагранжиан

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc^2 + m\left(U + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{m}{2c^2}\left(U^2 - 3Uv^2 - \frac{1}{4}v^4 - \frac{2\xi_0{}^{ж}}{m_0}U\right). \tag{8}$$

Жалпылама импульс

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{3U + \frac{v^2}{2}}{c^2}\right)m\vec{v}. \tag{9}$$

Соңында гамильтониан

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{3Up^2}{2mc^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2} - \frac{m\xi_0{}^{ж}}{m_0c^2}U. \tag{10}$$

Осы өрнекті (6) орнына қойып, аламыз

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{3U\vec{p}}{mc^2} - \frac{p^2\vec{p}}{2m^3c^2}, \tag{11}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\gamma m m_0}{r^3}\vec{r} - \frac{mU}{c^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{3p^2}{2mc^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{m\xi_0{}^{ж}}{m_0 c^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \tag{12}$$

Енді осы өрнектерді (4) орнына қойып көрейік. Содан кейін

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}\vec{M}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \tag{13}$$

Сондай ақ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\vec{p}}{mr} - \frac{(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{mr^3} - \frac{3U\vec{p}}{mc^2 r} - \frac{p^2\vec{p}}{2m^3c^2 r} + \frac{3U(\vec{r}\vec{p})}{mc^2}\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{p^2(\vec{r}\vec{p})}{2m^3c^2}\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{14}$$

(12) және (14) ескере отырып, (13) қайта жазамыз.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{U}{c^2}\left[\vec{\nabla}U\vec{M}\right] + \left(\frac{3p^2}{2m^2c^2} + \frac{\xi_0{}^{ж}}{m_0c^2}\right)\left[\vec{\nabla}U\,\vec{M}\right] + \frac{3\gamma m_0}{c^2}\frac{U\vec{p}}{r} +$$

$$+\frac{\gamma m_0}{2m^2c^2}\frac{p^2\vec{p}}{r} - \frac{3\gamma m_0 U(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{c^2r^3} - \frac{\gamma m_0 p^2(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{2m^2c^2r^3}, \tag{15}$$

Мұндағы $\vec{\nabla}$ - $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ операторы. Энергияның сақталу релятивистік емес заңын пайдаланып, осы теңдеудің оң жағын жеңілдетейік

$$E = \frac{p^2}{2m} - mU = -\frac{\gamma m m_0}{2a}. \tag{16}$$

Мұндағы a - эллипстің жартылай үлкен осі. Содан кейін қарапайым есептеулерден кейін (15) түрінде жазылады

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{2\gamma m_0}{c^2}\left(\frac{2E}{m} + 3U + \frac{\xi_0{}^{ж}}{2m_0}\right)\frac{[\vec{r}\vec{M}]}{r^3}. \tag{17}$$

Бұл теңдеу өте қарапайым және түсінікті пішінге ие, бұл $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық элементтерді пайдаланудың артықшылықтарының бірі. (17)-ден Кеплер эллипсінің перигелийінің орны уақыт бойынша тұрақты болып қалмайтыны анық. Ол (17) оң жағындағы $\frac{1}{c^2}$ көбейткіштің арқасында өте баяу өзгереді. (17) теңдеуін түрінде де көрсетуге болады

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{4E}{m} + \frac{\xi_0{}^{ж}}{m_0}\right)\left[\vec{\nabla} U\, \vec{M}\right] + \frac{3}{c^2}\left[\vec{\nabla} U^2\, \vec{M}\right]. \tag{18}$$

$\vec{A}$ вкторының ғасырлық өзгерістердің барысына мүдделі бола отырып, сынақ денесінің айналуының T периоды бойынша (17) оң жағын орташалайық. Ол үшін орташа мәндерді табу керек [2].

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec{r}}{r^3}dt\ ,\ \overline{\frac{\vec{r}}{r^4}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec{r}}{r^4}dt. \tag{19}$$

Импульс моментінің сақталуның релятивистік емес заңын қолданатын болсақ, олар оңай есептеледі

$$M = mr^2\dot{\varphi}. \tag{20}$$

Одан әрі

$$dt = \frac{mr^2}{M}d\varphi. \tag{21}$$

Сондықтан (19) t бойынша интегралдан φ үстіндегі интегралдауға көшуге болады. Содан кейін

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\vec{e}_r d\varphi = 0\ , \tag{22}$$

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^4}} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{e}_r d\varphi}{r} = \frac{\pi m e}{MTP}\vec{i}\ . \tag{23}$$

мұндағы P – эллипс параметрі, ал

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}. \tag{24}$$

сонымен, (17) мынадай болады

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\left[\vec{e}_M \vec{A}\right], \tag{25}$$

мұндағы

$$\vec{e}_M = \frac{\vec{M}}{M} = \vec{k}, \qquad \vec{A} = A\vec{e}_A = \gamma m m_0 e\vec{i}\ . \tag{26}$$

(25) көретініміздей, $\vec{A}$ векторы $\vec{M}$ орбитальды моменттің маңында мынадай бұрыштық жылдамдықпен айналады

$$\vec{\Omega}_A = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\vec{e}_M, \tag{27}$$

мөлшері өзгеріссіз қалады. Басқаша айтқанда, $\vec{A}$ векторы орбиталық жазықтықта бұрыштық жылдамдықпен айналады (27):

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}_A \vec{A}\right]. \tag{28}$$

Егер $\vec{A}$ вектордың орбиталық жазықтықтағы орны полярлық координаталар A және g арқылы сипатталса, онда (27) -тен аламыз.

$$\frac{dg}{dt} = \left(\vec{\Omega}_A \vec{e}_M\right) = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2} = \frac{6\pi\gamma m_0}{Ta\left(1-e^2\right)c^2} \ . \tag{29}$$

T периоды ішінде *g* полярлық бұрыштың өзгерісі

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a\left(1-e^2\right)c^2}. \tag{30}$$

Бұл перигелийдің ығысуының белгілі формуласы болып табылады [3]. Демек, нақтыланған бірінші жуықтау метрикасы (28) Шварцшильд есебіндегі перигелийдің ығысу шамасын дұрыс түсіндіреді деп айта аламыз.

Қолданылған әдебиет

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961.564 с.
2. Абдильдин М. М. Проблема движения тел в общей теории относительности // – Алматы: Изд-во «Қазақ университеті», 2006. – 132 с.
3. 16.Gordon W. Der Comptoneffekt nach der Schrodingerschen Theorie // Ibid. Bd. 40. S. 117-133.